

# Lógica

Equivalência Lógica

# 1. Conceito de Equivalência

- Quando duas proposições apresentam a mesma tabela-verdade dizemos que as proposições são equivalentes. A representação da equivalência lógica é dada pelo símbolo  $\Leftrightarrow$  ou  $\equiv$ .
- Informalmente, podemos dizer que duas proposições são equivalentes quando elas têm o mesmo significado. Exemplo:

a: "Eu moro em Maringá."

b: "Não é verdade que eu não moro em Maringá."

# 1. Conceito de Equivalência

- Podemos definir equivalência lógica formalmente como:
- Duas proposições A e B são equivalentes quando todos os valores lógicos (V ou F) assumidos por elas são iguais para todas as combinações de valores lógicos atribuídos às proposições simples que as compõem.

# 1. Conceito de Equivalência

- **Exemplo:** Verifique se as proposições  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$  e  $p \leftrightarrow q$  são equivalentes.
- Para resolver esse problema, basta construirmos a tabela-verdade de ambas proposições. Observe na imagem abaixo, que as proposições são equivalentes.
- Podemos dizer que  $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ | $q \rightarrow p$ | $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|-------------------|----------------------------------------------|-----------------------|
| V   | V   | V                 | V                 | V                                            | V                     |
| V   | F   | F                 | V                 | F                                            | F                     |
| F   | V   | V                 | F                 | F                                            | F                     |
| F   | F   | V                 | V                 | V                                            | V                     |

## 2. Equivalências Fundamentais

- Existem quatro equivalências fundamentais bastante conhecidas que devem ser entendidas e memorizadas. A primeira equivalência fundamental é conhecida como **contrapositiva da condicional**:  $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
- A equivalência é realizada do seguinte modo: Inverte-se as posições do antecedente e do conseqüente e nega-se ambos os termos da condicional. Exemplo:

p: “Hoje nevou.”

q: “Paulo usou blusa.”

- Podemos representar a condicional  $p \rightarrow q$ : "Se [hoje nevou], então [Paulo usou blusa]."
- Observe que a frase seguinte é equivalente:  
 $\sim q \rightarrow \sim p$ : "Se [Paulo não usou blusa], então [não nevou]."

## 2. Equivalências Fundamentais

- Um erro muito comum é dizer que  $p \rightarrow q$  seria equivalente a  $\sim p \rightarrow \sim q$ . Observe o exemplo: "se hoje nevou, então Paulo usou blusa". Vamos supor que não nevou. O que podemos afirmar sobre a blusa do Paulo?
- Absolutamente nada, ele pode tanto ter usado ou não a blusa. Por outro lado, podemos afirmar sem dúvida que  $\sim q \rightarrow \sim p$ , isto é, "se Paulo não usou blusa, é porque não nevou".
- Em resumo:  **$p \rightarrow q$  não é equivalente a  $\sim p \rightarrow \sim q$ .**

## 2. Equivalências Fundamentais

- Para mostrar a equivalência fundamental, montaremos a tabela-verdade de  $\sim q \rightarrow \sim p$  e compararemos com  $p \rightarrow q$ .

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $\sim q \rightarrow \sim p$ | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|----------|----------|-----------------------------|-------------------|
| V   | V   | F        | F        | V                           | V                 |
| V   | F   | F        | V        | F                           | F                 |
| F   | V   | V        | F        | V                           | V                 |
| F   | F   | V        | V        | V                           | V                 |

## 2. Equivalências Fundamentais

- **Exemplo:**

(CBM AM/2022) Um antigo ditado diz: “Se há fumaça então há fogo”. Uma sentença logicamente equivalente é

- a) se há fogo então há fumaça.
- b) se não há fumaça então não há fogo.
- c) se não há fogo, então não há fumaça.
- d) se não há fumaça pode haver fogo.
- e) se há fogo então pode haver fumaça.



## 2. Equivalências Fundamentais

- Sejam as proposições simples:

u: "Há fumaça."

o: "Há fogo."

- A sentença original pode ser descrita por  $u \rightarrow o$ : “Se [há fumaça], então [há fogo]”.
- Uma equivalência fundamental que pode ser usada quando existe o conectivo condicional é a contrapositiva:  $\sim o \rightarrow \sim u$ : **"Se [não há fogo], então [não há fumaça]."**
- **Letra C**

## 2. Equivalências Fundamentais

- A **segunda equivalência fundamental** é a transformação da condicional em disjunção inclusiva:  
 $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
- A equivalência é realizada do seguinte modo: Nega-se o primeiro termo, troca-se a condicional ( $\rightarrow$ ) pela disjunção inclusiva ( $\vee$ ) e mantém-se o segundo termo.
- Exemplo, considere a seguinte condicional  $p \rightarrow q$ : "Se [hoje nevou], então [Paulo usou blusa]."
- Observe que a frase seguinte é equivalente:  $\sim p \vee q$ : "[Hoje não nevou] ou [Paulo usou blusa]."

## 2. Equivalências Fundamentais

- Para mostrar a equivalência, montaremos a tabela-verdade de  $\sim p \vee q$  e compararemos com  $p \rightarrow q$ .

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim p \vee q$ | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|----------|-----------------|-------------------|
| V   | V   | F        | V               | V                 |
| V   | F   | F        | F               | F                 |
| F   | V   | V        | V               | V                 |
| F   | F   | V        | V               | V                 |

## 2. Equivalências Fundamentais

- Exemplo:

(BANESTES/2021) A frase a seguir é um conhecido ditado popular: “Se não tem cão então caça com gato”. Uma frase logicamente equivalente é:

- a) Se tem cão então não caça com gato;
- b) Se caça com gato então não tem cão;
- c) Tem cão ou caça com gato;
- d) Tem cão e caça com gato;
- e) Tem cão ou não caça com gato.

## 2. Equivalências Fundamentais

- Sejam as proposições simples:

c: "Não tem cão."

g: "Caça com gato."

- A proposição original pode ser descrita por  $\sim c \rightarrow g$ : "Se [não tem cão], então [caça com gato]."
- As alternativas apresentam tanto condicionais ( $\rightarrow$ ) quanto uma disjunção inclusiva ("ou",  $\vee$ ) como equivalentes. Devemos, portanto, testar as duas equivalências fundamentais que envolvem a condicional:

$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$  (contrapositiva)

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$  (transformação da condicional em disjunção inclusiva)

## 2. Equivalências Fundamentais

- Contrapositiva:  $\sim g \rightarrow c$ : "**Se [não caça com gato], então [tem cão].**"
- $\sim p \vee q$  (transformação da condicional em disjunção inclusiva): **[Tem cão] ou [caça com gato].**
- Alternativa C

## 2. Equivalências Fundamentais

- A **terceira equivalência fundamental** para sua prova é a transformação da disjunção em uma condicional:  $p \vee q \equiv \sim p \rightarrow q$
- A equivalência é realizada do seguinte modo: Nega-se o primeiro termo, troca-se a disjunção inclusiva ( $\vee$ ) pela condicional ( $\rightarrow$ ) e mantém-se o segundo termo.
- Como exemplo, a disjunção inclusiva "[Paulo estuda] ou [trabalha]" é equivalente a "Se [Paulo não estuda], então [trabalha]".

## 2. Equivalências Fundamentais

- Exemplo:

(Pref. Campinas/2019) Uma afirmação equivalente a: “Os cantadores da madrugada saíram hoje ou eu não ouço bem”, é

- a) Os cantadores da madrugada não saíram hoje ou eu ouço bem.
- b) Os cantadores da madrugada saíram hoje e eu ouço bem.
- c) Se os cantadores da madrugada saíram hoje, então eu não ouço bem.
- d) Os cantadores da madrugada não saíram hoje e eu ouço bem.
- e) Se os cantadores da madrugada não saíram hoje, então eu não ouço bem.f



## 2. Equivalências Fundamentais

- Sejam as proposições simples:

p: "Os cantadores da madrugada saíram hoje."

q: "Eu não ouço bem."

- A proposição é dada pela disjunção inclusiva  $p \vee q$ : "[Os cantadores da madrugada saíram hoje] ou [eu não ouço bem]."
- Aplicando a equivalencia  $p \vee q \equiv \sim p \rightarrow q$ : Se [Os cantadores da madrugada não saíram hoje] ou [Eu não ouço bem]
- Letra E

## 2. Equivalências Fundamentais

- Apesar da maioria dos autores considerar apenas três primeiras equivalências fundamentais, existe uma **quarta equivalência** que também é importante ser lembrada:  $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- Para exemplificar a equivalência, podemos dizer que a bicondicional "[Durmo] se e somente se [estou cansado]" é equivalente a "[Se (estou cansado), então (durmo)] e [se (durmo), então (estou cansado)]".
- Uma forma interessante de lembrar desta equivalência é: "uma forma equivalente à bicondicional é ir e voltar com a condicional".

## 2. Equivalências Fundamentais

- Exemplo:

(ISS RJ/2010) A proposição "um número inteiro é par se e somente se o seu quadrado for par" equivale logicamente à proposição:

- a) se um número inteiro for par, então o seu quadrado é par, e se um número inteiro não for par, então o seu quadrado não é par.
- b) se um número inteiro for ímpar, então o seu quadrado é ímpar.
- c) se o quadrado de um número inteiro for ímpar, então o número é ímpar.
- d) se um número inteiro for par, então o seu quadrado é par, e se o quadrado de um número inteiro não for par, então o número não é par.
- e) se um número inteiro for par, então o seu quadrado é par.

## 2. Equivalências Fundamentais

- Sejam as proposições:

p: "Um número inteiro é par."

q: "O quadrado de um número inteiro é par."

A proposição composta pode ser assim representada:

$P \leftrightarrow q$ : "[Um número inteiro é par] se e somente se [o seu quadrado for par]."

A bicondicional é equivalente a:  $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Se [o número inteiro é par] então [O quadrado do número inteiro é par] e Se [O quadrado do número inteiro é par] então [o número inteiro é par]

Entretanto, não temos nenhuma alternativa desta forma.

## 2. Equivalências Fundamentais

- Sejam as proposições:

$p$ : "Um número inteiro é par."

$q$ : "O quadrado de um número inteiro é par."

A proposição composta pode ser assim representada:

$P \leftrightarrow q$ : "[Um número inteiro é par] se e somente se [o seu quadrado for par]."

A bicondicional é equivalente a:  $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Se [o número inteiro é par] então [O quadrado do número inteiro é par] e Se [O quadrado do número inteiro é par] então [o número inteiro é par]

Entretanto, não temos nenhuma alternativa desta forma.

## 2. Equivalências Fundamentais

- Não temos alternativa que corresponda a essa última equivalência, porém, se realizarmos a contrapositiva de  $(q \rightarrow p)$ , encontramos:  $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$
- Esse resultado pode ser lido como  $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$ : "[Se (um número inteiro for par), então (o seu quadrado é par)], e [se (um número inteiro não for par), então (o seu quadrado não é par)]."
- Gabarito: Letra A

### 3. Equivalências da Negação de Proposições

- Antes de adentrarmos no assunto, é importante esclarecer que não se deve confundir equivalência com negação.
- Ao se construir negação de uma proposição, constrói-se uma nova proposição com valores lógicos sempre opostos aos da proposição original.
- Veremos mais adiante, por exemplo, que a negação de  $p \wedge q$  é  $\sim p \vee \sim q$ . Nesse caso, não podemos dizer que  $p \wedge q$  é equivalente a  $\sim p \vee \sim q$ , podemos dizer que  $\sim(p \wedge q)$  é equivalente a  $\sim p \vee \sim q$ , ou seja,  $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ .
- Feitas estas considerações iniciais, vamos analisar as equivalências provenientes da negação de proposições. Existem muitas maneiras de se expressar uma negação. A seguir serão apresentadas as formas mais comuns.

### 3. Equivalências da Negação de Proposições

#### 1. Dupla negação da proposição simples

- Um resultado importante que pode ser obtido da tabela verdade é que a negação da negação de  $p$  sempre tem valor lógico igual a proposição  $p$ , ou seja, é equivalente a  $p$ :  $\sim(\sim p) \equiv p$
- Como exemplo, a dupla negação "Não é verdade que [o Flamengo não é um time fraco]" é equivalente a "Flamengo é um time fraco".
- A prova dessa equivalência corresponde à tabela-verdade abaixo.

| $p$ | $\sim p$ | $\sim(\sim p)$ |
|-----|----------|----------------|
| V   | F        | V              |
| F   | V        | F              |



# 3. Equivalências da Negação de Proposições

## 2. Negação da conjunção

- Para realizar a negação conjunção  $p \wedge q$ , deve-se seguir o seguinte procedimento: Nega-se ambas as parcelas da conjunção e troca-se a conjunção ( $\wedge$ ) pela disjunção inclusiva ( $\vee$ ).
- Como resultado, podemos escrever que a negação de  $p \wedge q$ , também conhecida por  $\sim(p \wedge q)$ , é equivalente a  $\sim p \vee \sim q$ :  **$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$**
- Como exemplo, sejam as proposições:

$p$ : "Comi lasanha."

$q$ : "Bebi refrigerante."

- A conjunção dessas duas proposições pode ser escrita por:  $p \wedge q$ : "[Comi lasanha] e [bebi refrigerante]."
- A negação dessa frase é:  $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ : "[Não comi lasanha] ou [não bebi refrigerante]."

### 3. Equivalências da Negação de Proposições

A tabela verdade que comprova a equivalência:

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \wedge q$ | $\sim(p \wedge q)$ | $\sim p \vee \sim q$ |
|-----|-----|----------|----------|--------------|--------------------|----------------------|
| V   | V   | F        | F        | V            | F                  | F                    |
| V   | F   | F        | V        | F            | V                  | V                    |
| F   | V   | V        | F        | F            | V                  | V                    |
| F   | F   | V        | V        | F            | V                  | V                    |

# 3. Equivalências da Negação de Proposições

## 3. Negação da disjunção inclusiva

- De modo semelhante à negação da conjunção, para negarmos a disjunção inclusiva  $p \vee q$ , devemos seguir o seguinte procedimento: Negam-se ambas as parcelas da disjunção inclusiva e troca-se a disjunção inclusiva ( $\vee$ ) pela conjunção ( $\wedge$ ).
- Como resultado disso, podemos escrever que a negação de  $p \vee q$ , também conhecida por  $\sim(p \vee q)$ , é equivalente a  $\sim p \wedge \sim q$ :  **$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$**

### 3. Equivalências da Negação de Proposições

- Vejamos um exemplo  $p \vee q$ : "[Comi lasanha] ou [bebi refrigerante]."
- A negação dessa frase seria:  $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ : "[Não comi lasanha] e [não bebi refrigerante]."
- Essa equivalência pode ser facilmente constatada na tabela-verdade:

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \vee q$ | $\sim (p \vee q)$ | $\sim p \wedge \sim q$ |
|-----|-----|----------|----------|------------|-------------------|------------------------|
| V   | V   | F        | F        | V          | F                 | F                      |
| V   | F   | F        | V        | V          | F                 | F                      |
| F   | V   | V        | F        | V          | F                 | F                      |
| F   | F   | V        | V        | F          | V                 | V                      |

### 3. Equivalências da Negação de Proposições

- Exemplo:

(SSP AM/2022) Considere a afirmação: “Hoje é sexta-feira e amanhã não trabalharei”.

A negação lógica dessa sentença é

- a) Hoje não é sexta-feira ou amanhã trabalharei.
- b) Hoje não é sexta-feira, então amanhã trabalharei.
- c) Hoje é sexta-feira e amanhã trabalharei.
- d) Hoje é sexta-feira ou amanhã não trabalharei.

### 3. Equivalências da Negação de Proposições

- Sejam as proposições simples:

h: "Hoje é sexta-feira."

a: "Amanhã trabalharei."

- A proposição original pode ser escrita pela conjunção:  $h \wedge \sim a$ : "[Hoje é sexta-feira] e [Amanhã não trabalharei]". Para realizar a negação de uma conjunção, usa-se a equivalência  $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ .
- Em outras palavras, negam-se as duas proposições e troca-se o "e" pelo "ou". Para o caso em questão, temos:  $\sim(h \wedge \sim a) \equiv \sim h \vee \sim(\sim a)$
- A dupla negação da proposição simples a corresponde à proposição original. Desta forma, ficamos com:  $\sim(h \wedge \sim a) \equiv \sim h \vee a$
- Logo, a negação requerida pode ser descrita por:  $\sim h \vee a$ : "[Hoje não é sexta-feira] ou [amanhã trabalharei]."
- Alternativa A