

# Lógica

Proposições Compostas e Conectivos

# 1. Proposição Composta

- Uma **proposição composta** é formada pela combinação de duas ou mais proposições simples unidas por meio de conectivos. Exemplo: considere as proposições simples  $p$  e  $q$ :
  1.  $p$ : "Maria foi ao cinema."
  2.  $q$ : "João foi ao parque."
- Unindo as duas proposições simples por meio do conectivo "se...então", forma-se uma proposição distinta  $R$ : "Se Maria foi ao cinema, então João foi ao parque."
- Se for feita a união das mesmas proposições " $p$ " e " $q$ " por meio do conectivo "e", forma-se uma nova proposição composta  $S$  (diferente da proposição  $R$ ):  $S$ : "Maria foi ao cinema e João foi ao parque."

# 1. Proposição Composta

- O valor lógico (V ou F) resultante de uma proposição composta depende dos valores lógicos atribuídos a cada uma das proposições simples que forma sua composição.
- Podemos dizer, no exemplo acima, que o valor lógico (V ou F) que a proposição composta R assume é função dos valores lógicos assumidos pelas proposições simples p e q que a compõem.
- O tipo de conectivo utilizado também é determinante no valor lógico da proposição composta.

## 2. Conectivos Lógicos

- O quadro abaixo mostra os principais conectivos, bem como sua notação e principais características:

| Tipo                | Conectivo mais comum | Notação                | Notação alternativa    | Conectivos alternativos                               |
|---------------------|----------------------|------------------------|------------------------|-------------------------------------------------------|
| Conjunção           | e                    | $p \wedge q$           | $p \& q$<br>$p \cap q$ | p, mas q                                              |
| Disjunção Inclusiva | ou                   | $p \vee q$             | $p \cup q$             | -                                                     |
| Disjunção Exclusiva | ou... ,ou            | $p \vee\!\!\!\wedge q$ | $p \oplus q$           | p ou q, mas não ambos<br>p ou q (depende do contexto) |
| Condicional         | se... ,então         | $p \rightarrow q$      | $p \supset q$          | Se p, q                                               |
|                     |                      |                        |                        | Como p, q                                             |
|                     |                      |                        |                        | p, logo q                                             |
|                     |                      |                        |                        | p implica q                                           |
|                     |                      |                        |                        | Quando p, q                                           |
|                     |                      |                        |                        | Toda vez que p, q                                     |
|                     |                      |                        |                        | p somente se q                                        |
|                     |                      |                        |                        | q, se p                                               |
|                     |                      |                        |                        | q, pois p                                             |
|                     |                      |                        |                        | q porque p                                            |
|                     |                      |                        |                        | p é condição suficiente para q                        |
|                     |                      |                        |                        | q é condição necessária para p                        |
| Bicondicional       | se e somente se      | $p \leftrightarrow q$  | -                      | p assim como q                                        |
|                     |                      |                        |                        | p se e só se q                                        |
|                     |                      |                        |                        | Se p então q e se q então p                           |
|                     |                      |                        |                        | p somente se q e q somente se p                       |
|                     |                      |                        |                        | p é condição necessária e suficiente para q           |
|                     |                      |                        |                        | q é condição necessária e suficiente para p           |

## 2. Conectivos Lógicos

- Com relação as tabelas verdades de cada conectivo, temos:
- **Conjunção ( $p \wedge q$ ):** é verdadeira somente quando as proposições  $p$  e  $q$  são ambas verdadeiras.
- **Disjunção Inclusiva ( $p \vee q$ ):** é falsa somente quando as proposições  $p$  e  $q$  são ambas falsas
- **Disjunção Exclusiva ( $p \vee q$ ):** é falsa quando ambas as proposições tiverem o mesmo valor.
- **Condiciona ( $p \rightarrow q$ ):** é falsa somente quando a primeira proposição é verdadeira e a segunda é falsa.
- **Bicondiciona ( $p \leftrightarrow q$ ):** é verdadeira quando ambas as proposições tiverem o mesmo valor.

## 2. Conectivos Lógicos

- As tabelas verdades dos conectivos:

| Conjunção<br>"e" |   |              |
|------------------|---|--------------|
| p                | q | $p \wedge q$ |
| V                | V | V            |
| V                | F | F            |
| F                | V | F            |
| F                | F | F            |

| Disjunção Inclusiva<br>"ou" |   |            |
|-----------------------------|---|------------|
| p                           | q | $p \vee q$ |
| V                           | V | V          |
| V                           | F | V          |
| F                           | V | V          |
| F                           | F | F          |

| Disjunção Exclusiva<br>"ou...ou" |   |                   |
|----------------------------------|---|-------------------|
| p                                | q | $p \vee\! \vee q$ |
| V                                | V | F                 |
| V                                | F | V                 |
| F                                | V | V                 |
| F                                | F | F                 |

| Condicional<br>"se...então" |   |                   |
|-----------------------------|---|-------------------|
| p                           | q | $p \rightarrow q$ |
| V                           | V | V                 |
| V                           | F | F                 |
| F                           | V | V                 |
| F                           | F | V                 |

| Bicondicional<br>"se e somente se" |   |                       |
|------------------------------------|---|-----------------------|
| p                                  | q | $p \leftrightarrow q$ |
| V                                  | V | V                     |
| V                                  | F | F                     |
| F                                  | V | F                     |
| F                                  | F | V                     |

## 2. Conectivos Lógicos

- Os conectivos lógicos possíveis são divididos em cinco tipos, havendo formas diferentes de representá-los na língua portuguesa, conforme será visto adiante.
- Os cinco conectivos e as suas formas mais usuais na língua portuguesa são: Conjunção ("e"), Disjunção inclusiva ("ou"), Disjunção exclusiva ("ou...ou"), Condicional ("se...então") e Bicondicional ("se e somente se").
- É importante reforçar que a negação de uma proposição simples gera uma nova proposição simples. Assim, o operador lógico de negação ( $\sim$ ) não é um conectivo.

### 3. Conjunção ( $p \wedge q$ )

- O operador lógico "e" é um conectivo do tipo conjunção. É representado pelo símbolo " $\wedge$ " ou "&" (menos comum). Alguns autores também representam a conjunção com o símbolo de intersecção da teoria dos conjuntos: " $\cap$ ".
- Vamos analisar o exemplo de duas proposições simples  $p$  e  $q$ :
  - 1.  $p$ : "Paulo foi no jogo do verdão."
  - 2.  $q$ : "Ana foi ao shopping."
- A proposição composta  $R$ , é formada pela união das proposições simples com um conectivo "e". É representada por  $p \wedge q$ : "Paulo foi no jogo do verdão e Ana foi ao shopping."

### 3. Conjunção ( $p \wedge q$ )

- Vamos analisar as possibilidades de valores lógicos para a proposição composta R: "Paulo foi no jogo do verdão e Ana foi ao shopping."
- Possibilidade 1: Paulo realmente foi ao jogo do verdão ( $p$  é verdadeiro). Além disso, Ana de fato foi ao shopping ( $q$  também é verdadeiro).
- Desta forma, analisando a proposição composta, podemos dizer que essa frase é verdadeira. Isso significa que  $p \wedge q$  é verdadeiro.
- Possibilidade 2: Paulo realmente foi ao jogo do verdão ( $p$  é verdadeiro), mas Ana não foi ao shopping ( $q$  é falso). Desta forma, a frase é falsa ( $p \wedge q$  é falso).

### 3. Conjunção ( $p \wedge q$ )

- Possibilidade 3: Desta vez, Paulo não foi ao jogo do verdão ( $p$  é falso), mas Ana foi ao shopping ( $q$  é verdadeiro). Desta forma, a frase é falsa ( $p \wedge q$  é falso).
- Possibilidade 4: Paulo não foi ao jogo do verdão ( $p$  é falso), e Ana também não foi ao shopping ( $q$  é falso). Desta forma, a frase é falsa ( $p \wedge q$  é falso).

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| V   | V   | V            |
| V   | F   | F            |
| F   | V   | F            |
| F   | F   | F            |

### 3. Conjunção ( $p \wedge q$ )

- A história do Paulo no jogo do verdão serviu para entender o raciocínio por trás dos conceitos de proposições e conectivos lógicos. Mas é possível generalizar os resultados obtidos.
- A tabela abaixo, conhecida como tabela-verdade da conjunção, resume os valores lógicos que a conjunção  $p \wedge q$  pode assumir em função dos valores assumidos por  $p$  e por  $q$ .
- A conjunção  $p \wedge q$  é verdadeira somente quando as proposições  $p$  e  $q$  são ambas verdadeiras. Nos demais casos,  $p \wedge q$  é falsa.

| Conjunção |   |              |
|-----------|---|--------------|
| "e"       |   |              |
| p         | q | $p \wedge q$ |
| V         | V | V            |
| V         | F | F            |
| F         | V | F            |
| F         | F | F            |

### 3. Conjunção ( $p \wedge q$ )

- Uma observação importante, o conectivo "**mas**" é utilizado como conjunção. Apesar desse conectivo apresentar uma ideia de oposição, para fins de Lógica de Proposições, "mas" é igual ao conectivo "e".
- O mesmo vale para outras expressões adversativas, tais como: porém, entretanto, contudo, etc.
- Também é importante reforçar que a palavra "**nem**" corresponde a uma conjunção "e" seguida de uma negação "não".
- Considere, por exemplo, as seguintes proposições:
  - 1. p: "Paulo estuda."
  - 2. q: "Paulo viaja."
- Note que a proposição composta "Paulo não estuda nem viaja." corresponde a  $\sim p \wedge \sim q$ .
- $\sim p \wedge \sim q$ : "[Paulo não estuda] e [Paulo não viaja]."

## 4. Disjunção ( $p \vee q$ )

- O operador lógico "**ou**" é um conectivo do tipo **disjunção inclusiva**. É representado pelo símbolo " $\vee$ ". Alguns autores utilizam o símbolo de união para representar: "U".
- Exemplo:  $p \vee q$ : "Paulo vai para a Suíça ou Teresa vai a Roma."
- A disjunção inclusiva  $p \vee q$  é falsa somente quando as proposições  $p$  e  $q$  são ambas falsas. A tabela-verdade da disjunção inclusiva mostra os valores lógicos que a proposição composta  $p \vee q$  pode assumir:

| Disjunção Inclusiva |   |            |
|---------------------|---|------------|
| "ou"                |   |            |
| p                   | q | $p \vee q$ |
| V                   | V | V          |
| V                   | F | V          |
| F                   | V | V          |
| F                   | F | F          |

## 4. Disjunção ( $p \vee q$ )

- Para exemplificar disjunção inclusiva ser verdadeira, vamos analisar as proposições simples abaixo:
  1.  $p$ : "1 + 1 = 3" (F)
  2.  $q$ : "Café não é uma bebida." (F)
- Nesse caso, a disjunção inclusiva  $p \vee q$  é dada por:  $a \vee b$ : "7 + 1 = 10 ou café não é uma bebida." Essa proposição composta é falsa, pois ambas as proposições simples  $a$  e  $b$  são falsas.
- Na lógica de proposições, o uso do conectivo "ou" sozinho será, na grande maioria das situações, com sentido de inclusão. Isso prega uma independência entre as proposições simples, que podem resultar em verdadeiro bastando uma delas ser verdadeira.

## 5. Disjunção Exclusiva( $p \vee q$ )

- O operador lógico "ou...,ou" é um conectivo do tipo disjunção exclusiva. É representado pelo símbolo " $\vee$ ".
- Na disjunção exclusiva as duas proposições não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo. O sentido de exclusão conferido por esse conectivo significa que, apenas uma das proposições simples (que formam a composta) devem ser verdadeiras para a proposição final ser verdadeira.
- Exemplo: "Ou Paulo vai ao jogo do Palmeiras ou Ana vai ao shopping". Apenas uma das duas podem ser verdadeiras.

| Disjunção Exclusiva |   |            |
|---------------------|---|------------|
| "ou...ou"           |   |            |
| p                   | q | $p \vee q$ |
| V                   | V | F          |
| V                   | F | V          |
| F                   | V | V          |
| F                   | F | F          |

## 5. Disjunção Exclusiva( $p \vee q$ )

- Um outro exemplo de aplicação da disjunção exclusiva:  $p \vee q$ : "Ou hoje é domingo, ou hoje é segunda-feira".
- Observe que não tem como ambas as proposições simples serem verdadeiras ao mesmo tempo.
- A expressão "**...ou..., mas não ambos**" também pode ser utilizada como disjunção exclusiva. Exemplo:  $p \vee q$ : "Paulo vai ao jogo do verdão ou Ana vai ao shopping, mas não ambos."
- Em algumas situações é necessário supor que o uso do "ou" **sozinho**, exatamente como é usado na disjunção inclusiva, é uma disjunção exclusiva. Isso pode ocorrer quando, considerando o contexto, as proposições simples não podem ser simultaneamente verdadeiras.
- Exemplo:  $p \vee q$ : "Paulo é mineiro ou Paulo é paranaense."

## 6. Condicional ( $p \rightarrow q$ )

- O operador lógico "**se... ,então**" é um conectivo do tipo **condicional**. Ele é simbolizado por " $\rightarrow$ " ou " $\supset$ " (esse bem menos comum).
- Exemplo de aplicação:  $p \rightarrow q$ : "Se Paulo vai ao jogo do verdão, então Ana vai ao shopping central.". A proposição condicional  $p \rightarrow q$  é falsa somente quando a **primeira proposição é verdadeira e a segunda é falsa**, como mostra a tabela verdade:

| Condicional  |   |                   |
|--------------|---|-------------------|
| "se...então" |   |                   |
| p            | q | $p \rightarrow q$ |
| V            | V | V                 |
| V            | F | F                 |
| F            | V | V                 |
| F            | F | V                 |

## 6. Condicional ( $p \rightarrow q$ )

- Como exemplo de aplicação da tabela verdade, vamos analisar as duas proposições simples abaixo:
  1.  $p$ : "Paulo é jogador de futebol."
  2.  $q$ : "Paulo sabe chutar a bola."
- A proposição composta com o condicional fica da seguinte forma:  $p \rightarrow q$ : "Se Paulo é jogador de futebol, então Paulo sabe chutar a bola."
- A única opção falsa será: "Paulo é jogador de futebol" é verdadeira e  $q$ : "Paulo sabe chutar a bola" é falsa. Na situação apresentada, temos que Paulo é jogador e não sabe chutar. A proposição condicional é falsa.

## 6. Condicional ( $p \rightarrow q$ )

- Como mostrado, a forma clássica de se representar a condicional  $p \rightarrow q$  é a seguinte: "Se Pedro vai ao parque, então Maria vai ao cinema.". Mas também é possível encontrar outras formas de representar o condicional, são elas:
  1. Omitir o "então":  $p \rightarrow q$ : "Se Pedro vai ao parque, Maria vai ao cinema."
  2. Trocar o "Se" por "Como":  $p \rightarrow q$ : "Como Pedro vai ao parque, Maria vai ao cinema."
  3. Só o contexto de condição:  $p \rightarrow q$ : "Pedro vai ao parque, logo Maria vai ao cinema."
  4. Utilizando o "implica":  $p \rightarrow q$ : "Pedro ir ao parque implica Maria ir ao cinema."
  5. Utilizando o "Quando":  $p \rightarrow q$ : "Quando Pedro vai ao parque, Maria vai ao cinema."
  6. Utilizando o "Toda vez que":  $p \rightarrow q$ : "Toda vez que Pedro vai ao parque, Maria vai ao cinema."
  7. Utilizando o "somente se":  $p \rightarrow q$ : "Pedro vai ao parque somente se Maria vai ao cinema."  
(cuidado não confundir com o conectivo bicondicional se somente se)

## 6. Condicional ( $p \rightarrow q$ )

- Também é possível encontrar condicionais com a ordem invertida. É preciso ter atenção para identificar os casos em que ocorre a inversão da ordem entre  $p$  e  $q$ .
  - As três condicionais a seguir, para fins de Lógica de Proposições, são exatamente iguais e a proposição condicional tradicional:  $p \rightarrow q$ : "Se Pedro vai ao parque, então Maria vai ao cinema."
1.  $p \rightarrow q$ : "Maria vai ao cinema, se Pedro ir ao parque."
  2.  $p \rightarrow q$ : "Maria vai ao cinema, pois Pedro vai ao parque."
  3.  $p \rightarrow q$ : "Maria vai ao cinema porque Pedro vai ao parque."

## 6. Condicional ( $p \rightarrow q$ )

- No conectivo condicional, temos o conceito de condição **suficiente** e condição **necessária**.

Quando temos uma condicional  $p \rightarrow q$ , podemos dizer que:

- $p$  é condição **suficiente** para  $q$ ;
  - $q$  é condição **necessária** para  $p$ .
- 
- Uma forma de não trocar condição necessária por suficiente e vice-versa é lembrar que a palavra "se" do "se...então" aponta para a condição suficiente. Considere a condicional abaixo:
  - $p \rightarrow q$ : "Se Pedro vai ao parque, então Maria vai ao cinema."
  - Podemos reescrevê-la dos seguintes modos:
  - $p \rightarrow q$ : "Pedro ir ao parque é condição suficiente para Maria ir ao cinema."
  - $p \rightarrow q$ : "Maria ir ao cinema é condição necessária para Pedro ir ao parque."

## 6. Condicional ( $p \rightarrow q$ )

- Sempre que utilizamos uma proposição composta com o conectivo condicional, as proposições que a compõem têm nomes especiais, como mostra a imagem abaixo:

| Condicional ( $p \rightarrow q$ ) |                            |
|-----------------------------------|----------------------------|
| p                                 | q                          |
| Antecedente                       | Consequente                |
| Precedente                        | Subsequente                |
| <b>Condição suficiente</b>        | <b>Condição necessária</b> |

## 6. Condicional ( $p \rightarrow q$ )

- Exemplo de aplicação dos termos "antecedente" e "subsequente":

(PGE PE/2019) A afirmação a seguir é verdadeira ou falsa?

Se uma proposição na estrutura condicional — isto é, na forma  $p \rightarrow q$ , em que  $p$  e  $q$  são proposições simples — for falsa, então o precedente será, necessariamente, falso.

**Resposta:** O precedente ( $p$ ) deve ser verdadeiro, pois para o condicional ser falso, o precedente ( $p$ ) deve ser verdadeiro e o subsequente ( $q$ ) deve ser falso. **FALSO.**

## 7. Recíproca da Condicional

- Denominamos de **recíproca da condicional** quando invertemos o "p" pelo "q" de uma proposição composta com conectivo condicional. Em outras palavras, trocamos o antecedente pelo subsequente.
- É gerada uma nova proposição composta completamente distinta da original. Em resumo, para uma condicional qualquer  $p \rightarrow q$ , a sua recíproca é dada por  $q \rightarrow p$ . Considere, por exemplo:
  - $p \rightarrow q$ : "Se Pedro vai ao parque, então Maria vai ao cinema."
  - A sua recíproca é dada por  $q \rightarrow p$ : "Se Maria vai ao cinema, então Pedro vai ao parque."

Observação: A recíproca não é equivalente a sua proposição original. Em outras palavras, a recíproca da condicional não corresponde à condicional original.

## 8. Bicondicional ( $p \leftrightarrow q$ )

- O operador lógico "**se e somente se**" é um conectivo do tipo **bicondicional**. É representado pelo símbolo " $\leftrightarrow$ ". Exemplo:  $p \leftrightarrow q$ : "Paulo vai na UFPR se e somente se Ana vai ao shopping."
- A proposição bicondicional  $p \leftrightarrow q$  é verdadeira somente quando ambas as proposições simples apresentam o mesmo valor lógico, como mostra a tabela verdade:

| Bicondicional     |   |                       |
|-------------------|---|-----------------------|
| "se e somente se" |   |                       |
| p                 | q | $p \leftrightarrow q$ |
| V                 | V | V                     |
| V                 | F | F                     |
| F                 | V | F                     |
| F                 | F | V                     |

## 8. Bicondicional ( $p \leftrightarrow q$ )

- Para entender o conectivo, vamos analisar o exemplo abaixo:
  1.  $p$ : "Hoje é dia 19/01."
  2.  $q$ : "Hoje é aniversário do Chuck Norris."
  3.  $p \leftrightarrow q$ : "Hoje é dia 19/01 se e somente se hoje é aniversário do Chuck Norris".
- Observe que a proposição será verdadeira apenas se as duas proposições tiverem o mesmo valor lógico.

## 8. Bicondicional ( $p \leftrightarrow q$ )

- Existem algumas **formas alternativas** de formar uma proposição bicondicional que são diferentes do tradicional se... então se. Vamos pensar no exemplo:  $p \leftrightarrow q$ : "Pedro vai ao parque se e somente se Maria vai ao cinema.", podemos representar das seguintes formas:
  1. p assim como q: "Pedro vai ao parque assim como Maria vai ao cinema."
  2. p se e só se q: "Pedro vai ao parque se e só se Maria vai ao cinema."
  3. Se p, então q e se q, então p: "Se Pedro vai ao parque, então Maria vai ao cinema e se Maria vai ao cinema, então Pedro vai ao parque."
  4. p somente se q e q somente se p: "Pedro vai ao parque somente se Maria vai ao cinema e Maria vai ao cinema somente se Pedro vai ao parque."

Observe que os exemplos 3 e 4 são formadas por conectivos condicionais. Uma vez da forma original e em seguida da forma invertida.

## 8. Bicondicional ( $p \leftrightarrow q$ )

- Diferentemente do condicional, em uma estrutura bicondicional, dizemos que **p é condição necessária e suficiente para q**, bem como dizemos que **q é condição necessária e suficiente para p**.
- Analisando a proposição composta bicondicional:  $p \leftrightarrow q$ : "Paulo vai ao jogo se e somente se Ana vai ao shopping." Podemos representar essa proposição também desses dois modos:

### 1. p é condição necessária e suficiente para q

$p \leftrightarrow q$ : "Paulo ir ao jogo é condição necessária e suficiente para Ana ir ao shopping."

### 2. q é condição necessária e suficiente para p

$p \leftrightarrow q$ : "Maria ir ao shopping é condição necessária e suficiente para Paulo ir ao jogo."

## 8. Bicondicional ( $p \leftrightarrow q$ )

- Em resumo, é importante gravar as seguintes informações:

**Conjunção ( $p \wedge q$ ):** é verdadeira somente quando as proposições  $p$  e  $q$  são ambas verdadeiras.

**Disjunção Inclusiva ( $p \vee q$ ):** é falsa somente quando as proposições  $p$  e  $q$  são ambas falsas

**Disjunção Exclusiva ( $p \vee\!\!\!\wedge q$ ):** é falsa quando ambas as proposições tiverem o mesmo valor.

**Condiciona ( $p \rightarrow q$ ):** é falsa somente quando a primeira proposição é verdadeira e a segunda é falsa.

**Bicondiciona ( $p \leftrightarrow q$ ):** é verdadeira quando ambas as proposições tiverem o mesmo valor.

| Conjunção |   |              |
|-----------|---|--------------|
| "e"       |   |              |
| p         | q | $p \wedge q$ |
| V         | V | V            |
| V         | F | F            |
| F         | V | F            |
| F         | F | F            |

| Disjunção Inclusiva |   |            |
|---------------------|---|------------|
| "ou"                |   |            |
| p                   | q | $p \vee q$ |
| V                   | V | V          |
| V                   | F | V          |
| F                   | V | V          |
| F                   | F | F          |

| Disjunção Exclusiva |   |                        |
|---------------------|---|------------------------|
| "ou...ou"           |   |                        |
| p                   | q | $p \vee\!\!\!\wedge q$ |
| V                   | V | F                      |
| V                   | F | V                      |
| F                   | V | V                      |
| F                   | F | F                      |

| Condiciona   |   |                   |
|--------------|---|-------------------|
| "se...então" |   |                   |
| p            | q | $p \rightarrow q$ |
| V            | V | V                 |
| V            | F | F                 |
| F            | V | V                 |
| F            | F | V                 |

| Bicondiciona      |   |                       |
|-------------------|---|-----------------------|
| "se e somente se" |   |                       |
| p                 | q | $p \leftrightarrow q$ |
| V                 | V | V                     |
| V                 | F | F                     |
| F                 | V | F                     |
| F                 | F | V                     |