Lógica

Algebra de Proposições

1. Introdução

- A álgebra de proposições trabalha com o uso de propriedades de equivalências lógicas com o objetivo de simplificar expressões lógicas.
- Existem diversas propriedades, mas as mais importantes que é preciso memorizar são as propriedades **comutativa**, **associativa** e **distributiva**.

2. Propriedade Comutativa

- **Todos os conectivos, exceto o condicional "se...então",** possuem a propriedade comutativa. Isso significa que é possível inverter a ordem dos componentes em uma proposição composta sem afetar o resultado da tabela-verdade:
- $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- $p \vee q \equiv q \vee p$
- $p \underline{\vee} q \equiv q \underline{\vee} p$
- $P \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$

2. Propriedade Comutativa

- Exemplo: Encontre a negação da seguinte proposição $p \rightarrow q$: "Se eu correr, então chego a tempo."
- Sabemos que a condicional não possui propriedade comutativa. A negação dessa condicional pode ser encontrada pela seguinte equivalência: $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$: **"Corro e não chego a tempo."**
- Vamos supor que entre as alternativas da questão, não exista a proposição acima. Porém, se encontrarmos "Não chego a tempo e corro", essa será a resposta certa.
- Isso porque, usando a propriedade comutativa, a conjunção obtida $p \wedge \sim q$ pode ser escrita como $\sim q \wedge p$: $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q \equiv \sim q \wedge p$: "Não chego a tempo e corro."

3. Propriedade Comutativa

- Na álgebra tradicional, propriedade associativa nos diz que em uma multiplicação de diversos termos, podemos realizar as operações de multiplicação na ordem que bem entendermos que o resultado será o mesmo:
- Por exemplo: $(3 \times 5) \times 7 = 3 \times (5 \times 7)$ tem o mesmo resultado de $(3 + 5) + 7 = 3 + (5 + 7)$
- Na álgebra de proposições temos algo muito semelhante. Dizemos que a conjunção "e" e a disjunção inclusiva "ou" também possuem a propriedade associativa, sendo válidas as equivalências: **$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$** e **$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$**
- Observe que a propriedade associativa não mistura em uma mesma expressão o conectivo "e" e o conectivo "ou"

3. Propriedade Comutativa

- Exemplo: Mostre que $p \vee (q \vee \sim p)$ é uma tautologia:
- Lembrando que uma tautologia ocorre quando a proposição em questão é sempre verdadeira.
- Utilizando a propriedade **comutativa** em $(q \vee \sim p)$, temos: $p \vee (\sim p \vee q)$
- Utilizando a propriedade **associativa** na expressão acima, temos: $(p \vee \sim p) \vee q$
- $(p \vee \sim p)$ é sempre verdadeiro, portanto, é uma tautologia

3. Propriedade Comutativa

(TRT 1/2008) Proposições compostas são denominadas equivalentes quando possuem os mesmos valores lógicos V ou F, para todas as possíveis valorações V ou F atribuídas às proposições simples que as compõem. Assinale a opção correspondente à proposição equivalente a “ $\neg[[A \wedge (\neg B)] \rightarrow C]$ ”.

a) $A \wedge (\neg B) \wedge (\neg C)$

b) $(\neg A) \vee (\neg B) \vee C$

c) $C \rightarrow [A \wedge (\neg B)]$

d) $(\neg A) \vee B \vee C$

e) $[(\neg A) \wedge B] \rightarrow (\neg C)$

3. Propriedade Comutativa

- A proposição original trata da negação de um condicional em que o antecedente da condicional é uma conjunção dada por $[A \wedge (\sim B)]$.
- Para negar uma condicional, utilizamos a equivalência $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$. No caso, devemos manter $[A \wedge (\sim B)]$, trocar a condicional pela conjunção e negar C: $[A \wedge (\sim B)] \rightarrow C \equiv [A \wedge (\sim B)] \wedge (\sim C)$
- Observe que, pela propriedade associativa, a ordem em que é executada a conjunção não importa. Logo, podemos escrever: $[A \wedge (\sim B)] \rightarrow C \equiv A \wedge (\sim B) \wedge (\sim C)$
- Gabarito: Letra A.

4. Propriedade Distributiva

- Na álgebra tradicional, a propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição consiste em realizar a seguinte operação: $3 \times (5 + 7) = 3 \times 5 + 3 \times 7$
- Da mesma forma, podemos partir do lado direito da equação acima chegar ao lado esquerdo "colocando o número 3 em evidência": $3 \times 5 + 3 \times 7 = 3 \times (5 + 7)$
- Na álgebra de proposições temos as seguintes propriedades distributivas:
 1. Do conectivo "e" com relação ao conectivo "ou";
 2. Do conectivo "ou" com relação ao conectivo "e".

4. Propriedade Distributiva

- A propriedade distributiva do conectivo "e" em relação ao "ou" é dada pela equivalência abaixo. Perceba que nela " $p \wedge$ " é distribuído: **$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$**
- É importante também reconhecer a propriedade inversa, colocando o termo " $p \wedge$ " em evidência: **$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \equiv p \wedge (q \vee r)$**
- A propriedade distributiva do conectivo "ou" em relação ao "e" é dada pela equivalência abaixo. Perceba que nela " $p \vee$ " é distribuído: **$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$**
- É importante também reconhecer a propriedade inversa, colocando o termo " $p \vee$ " em evidência: **$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv p \vee (q \wedge r)$**

4. Propriedade Distributiva

(SEFAZ SC/2010) Na questão, considere a notação $\neg X$ para a negação da proposição X . Considere as proposições a e b e assinale a expressão que é logicamente equivalente a expressão composta a seguir: $(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$

a) $\neg a \wedge \neg b$

b) $\neg a \vee \neg b$

c) $\neg a \vee b$

d) $a \vee \neg b$

e) a

4. Propriedade Distributiva

- Com a propriedade distributiva, podemos colocar "a $\wedge$ " em evidência: $(a \wedge b) \vee (a \wedge \sim b) \equiv a \wedge (b \vee \sim b)$
- A expressão $(b \vee \sim b)$ é uma tautologia. Logo, $a \wedge (b \vee \sim b)$ corresponde a: $a \wedge t$
- Perceba que o valor da conjunção é determinado exclusivamente por a, uma vez que a outra parcela da conjunção é sempre verdadeira. Portanto: $(a \wedge b) \vee (a \wedge \sim b) \equiv a$
- Gabarito: Letra E.