Simplificação de Expressões

Mapa de Karnaugh

1. Introdução

- Nas aulas anteriores projetamos diversos circuitos sem a preocupação de simplificarmos de modo que utilizassem o menor número possível de portas lógicas.

- Agora vamos estudar algumas técnicas para simplificar circuitos, aumentando a eficiência e a economia.

- O primeiro passo para entender as técnicas de simplificação é analisar como funciona algumas propriedades e postulados da Álgebra de Boole.

2. Postulado da Complementação

- A imagem mostra algumas propriedade da complementação:

Este postulado, mostra como são as regras da complementação na álgebra de Boole. Chamaremos de $\overline{A}$ o complemento de A:

1º) Se $A = 0 \rightarrow \overline{A} = 1$

2º) Se $A = 1 \rightarrow \overline{A} = 0$

Através do postulado da complementação, podemos estabelecer a seguinte identidade:

$\overline{\overline{A}} = \mathbf{A}$

Se $A = 1$, temos: $\overline{A} = 0$ e se $\overline{A} = 0 \rightarrow \overline{\overline{A}} = 1$.

Se $A = 0$, temos: $\overline{A} = 1$ e se $\overline{A} = 1 \rightarrow \overline{\overline{A}} = 0$.

Assim sendo, podemos escrever: $\overline{\overline{A}} = A$.

O bloco lógico que executa o postulado da complementação é o Inversor.

3. Postulado da Adição

- A imagem mostra algumas propriedades da adição:

Este postulado, mostra como são as regras da adição dentro da Álgebra de Boole.

1º) $0 + 0 = 0$

2º) $0 + 1 = 1$

3º) $1 + 0 = 1$

4º) $1 + 1 = 1$

Através deste postulado, podemos estabelecer as seguintes identidades:

A+0 = A. A pode ser 0 ou 1, vejamos, então, todas as possibilidades:

$A = 0 \rightarrow 0 + 0 = 0$

$A = 1 \rightarrow 1 + 0 = 1$

Notamos que o resultado será sempre igual à variável A.

3. Postulado da Adição

- A imagem mostra outras propriedades da adição:

$A + 1 = 1$. Vejamos todas as possibilidades:

$A = 0 \rightarrow 0 + 1 = 1$

$A = 1 \rightarrow 1 + 1 = 1$

Notamos que se somarmos 1 a uma variável, o resultado será sempre 1.

$A + A = A$. Vejamos todas as possibilidades:

$A = 0 \rightarrow 0 + 0 = 0$

$A = 1 \rightarrow 1 + 1 = 1$

Notamos que se somarmos a mesma variável, o resultado será ela mesma.

$A + \overline{A} = 1$. Vejamos todas as possibilidades:

$A = 0 \rightarrow \overline{A} = 1 \rightarrow 0 + 1 = 1$

$A = 1 \rightarrow \overline{A} = 0 \rightarrow 1 + 0 = 1$

Notamos que sempre que somarmos a uma variável o seu complemento, teremos como resultado 1.

O bloco lógico que executa o postulado da adição é o OU.

4. Postulado da Multiplicação

- A imagem mostra algumas propriedades da multiplicação:

É o postulado que determina as regras da multiplicação booleana:

1º) $0 \cdot 0 = 0$

2º) $0 \cdot 1 = 0$

3º) $1 \cdot 0 = 0$

4º) $1 \cdot 1 = 1$

Através deste postulado, podemos estabelecer as seguintes identidades:

A . 0 = 0. Podemos confirmar, verificando todas as possibilidades:

$A = 0 \rightarrow 0 \cdot 0 = 0$

$A = 1 \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$

Notamos que todo número multiplicado por 0 é 0.

4. Postulado da Multiplicação

- A imagem mostra algumas propriedades da multiplicação:

$A . 1 = A$. Analisando todas as possibilidades, temos:

$A = 0 \rightarrow 0 . 1 = 0$

$A = 1 \rightarrow 1 . 1 = 1$

Notamos que o resultado destas expressões numéricas será sempre igual a A.

$A . A = A$. Esta identidade, à primeira vista estranha, é verdadeira, como podemos confirmar pela análise de todas as possibilidades:

$A = 0 \rightarrow 0 . 0 = 0$

$A = 1 \rightarrow 1 . 1 = 1$

Notamos que os resultados serão sempre iguais a A.

$A . \overline{A} = 0$. Vamos analisar todas as possibilidades:

$A = 0 \rightarrow 0 . 1 = 0$

$A = 1 \rightarrow 1 . 0 = 0$

Notamos que para ambos os valores possíveis que a variável pode assumir, o resultado da expressão será sempre 0.

O bloco lógico que executa o postulado da multiplicação é o E.

5. Propriedades Algébricas

- A imagem mostra as propriedades comutativas, distributivas e associativas:

3.4.1 Propriedade Comutativa

Esta propriedade é válida tanto na adição, bem como na multiplicação:

Adição: $A + B = B + A$

Multiplicação: $A . B = B . A$

3.4.2 Propriedade Associativa

Da mesma forma que na anterior, temos a propriedade associativa válida na adição e na multiplicação:

Adição: $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$

Multiplicação: $A . (B.C) = (A.B) . C = A.B.C$

3.4.3 Propriedade Distributiva

$A . (B+C) = A.B + A.C$

6. Teorema de Morgan

- Os dois Teorema de Morgan são muito utilizados para simplificação de expressões booleanas:

3.5.1 1º Teorema de De Morgan

O complemento do produto é igual à soma dos complementos:

$$\left(\overline{A \cdot B}\right) = \overline{A} + \overline{B}$$

Para provar este teorema, vamos montar a tabela da verdade de cada membro e comparar os resultados:

A	B	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

O teorema pode ser estendido para mais de duas variáveis:

$$\left(\overline{A.B.C \quad \ldots \quad N}\right) = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \quad \ldots \quad + \overline{N}$$

6. Teorema de Morgan

- O segundo Teorema de Morgan:

$$\overline{A}.\overline{B} = \left(\overline{A + B}\right) \leftarrow 2^{\underline{o}} \text{ Teorema}$$

Da mesma forma que no anterior, o teorema pode ser estendido para mais de duas variáveis:

$$\left(\overline{A + B + C + \ \ldots + N}\right) = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} \ldots \ \overline{N}$$

7. Identidades Auxiliares

- Existem diversas propriedades auxiliares que ajudam na simplificação de expressões, mas vamos destacar as 3 que são as mais utilizadas:

$$A + A \,.\, B = A$$

$$A + \overline{A} \,.\, B = A + B$$

$$(A + B) \,.\, (A + C) = A + B \,.\, C$$

8. Quadro de Resumos

POSTULADOS		
Complementação	**Adição**	**Multiplicação**
$A = 0 \rightarrow \overline{A} = 1$ $A = 1 \rightarrow \overline{A} = 0$	$0 + 0 = 0$ $0 + 1 = 1$ $1 + 0 = 1$ $1 + 1 = 1$	$0 . 0 = 0$ $0 . 1 = 0$ $1 . 0 = 0$ $1 . 1 = 1$
IDENTIDADES		
Complementação	**Adição**	**Multiplicação**
$\overline{\overline{A}} = A$	$A + 0 = A$ $A + 1 = 1$ $A + A = A$ $A + \overline{A} = 1$	$A . 0 = 0$ $A . 1 = A$ $A . A = A$ $A . \overline{A} = 0$

8. Quadro de Resumos

PROPRIEDADES	
Comutativa:	$A + B = B + A$ $A \cdot B = B \cdot A$
Associativa:	$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$ $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C$
Distributiva:	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
TEOREMAS DE MORGAN	
$\left(\overline{A \cdot B}\right) = \overline{A} + \overline{B}$ $\left(\overline{A + B}\right) = \overline{A} \cdot \overline{B}$	
IDENTIDADES AUXILIARES	
$A + A \cdot B = A$ $A + \overline{A} \cdot B = A + B$ $(A + B) \cdot (A + C) = A + B \cdot C$	

9. Simplificação de Expressões Booleanas

- Uma das formas de simplificar as expressões (e os circuitos por consequência) é utilizar as propriedades algébricas vistas anteriormente, por exemplo:

$$S = ABC + A\overline{C} + A\overline{B}$$

Vamos simplificá-la, utilizando a Álgebra de Boole. Primeiramente, vamos evidenciar o termo A:

$$S = A\left(BC + \overline{C} + \overline{B}\right)$$

Agora, aplicando a propriedade associativa, temos:

$$S = A\left[BC + (\overline{C} + \overline{B})\right]$$

Aplicando a identidade $\overline{\overline{X}} = X$, temos:

$$S = A\left[BC + (\overline{\overline{\overline{C} + \overline{B}}})\right]$$

Aplicando o teorema de De Morgan, temos:

$$S = \left[BC + (\overline{BC})\right]A$$

Chamando BC de Y, logo $\left(\overline{BC}\right) = \overline{Y}$, temos então:

$$S = A(Y + \overline{Y})$$

Como $Y + \overline{Y} = 1$, logo: $S = A \cdot 1 = A \;\therefore\; S = A$

9. Simplificação de Expressões Booleanas

- Analisando um novo exemplo:

$$S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C$$

Tirando $\overline{A} \,.\, \overline{C}$ em evidência nos dois primeiros termos, temos:

$$S = \overline{A}.\overline{C}.(\overline{B} + B) + A\overline{B}C$$

Aplicando a identidade: $B + \overline{B} = 1$, temos:

$$S = \overline{A}.\overline{C}.(\overline{B} + B) + A\overline{B}C = \overline{A}.\overline{C} + A\overline{B}C \quad \therefore \quad S = \overline{A}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

9. Simplificação de Expressões Booleanas

- Exercício: Simplifique a expressão:

$$S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C}$$

para

$$S = \overline{A}BC + \overline{C}.$$

9. Simplificação de Expressões Booleanas

- Resposta:

$$S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C}$$

Evidenciando $\overline{C}$, temos:

$$S = \overline{A}BC + \overline{C}(\overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B + A\overline{B} + AB)$$

Evidenciando $\overline{A}$ e A, temos:

$$S = \overline{A}BC + \overline{C}\left[\overline{A}(\overline{B} + B) + A(\overline{B} + B)\right]$$

$$S = \overline{A}BC + \overline{C}(\overline{A}.1 + A.1) \rightarrow \text{identidade } \overline{X} + X = 1$$

$$S = \overline{A}BC + \overline{C}(\overline{A} + A)$$

$$S = \overline{A}BC + \overline{C}.1 \rightarrow \text{identidade } \overline{X} + X = 1$$

$$S = \overline{A}BC + \overline{C}.$$

9. Simplificação de Expressões Booleanas

- Exercício: Simplifique a expressão:

$$S = (A + B + C).(\overline{A} + \overline{B} + C) \quad \text{para} \quad S = A\overline{B} + \overline{A}B + C$$

9. Simplificação de Expressões Booleanas

- Resposta:

$$S = (A + B + C).(\overline{A} + \overline{B} + C)$$

Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$S = A\overline{A} + A\overline{B} + AC + \overline{A}B + B\overline{B} + BC + \overline{A}C + \overline{B}C + CC$$

Vamos usar as identidades $X.\overline{X} = 0$ e X.X=X e reescrever:

$$S = A\overline{B} + AC + \overline{A}B + BC + \overline{A}C + \overline{B}C + C$$

Colocando C em evidência, temos:

$$S = A\overline{B} + C(A + B + \overline{A} + \overline{B} + 1) + \overline{A}B$$

Usando as identidades: X+1=1 e X.1=X, obtemos o resultado final:

$$S = A\overline{B} + \overline{A}B + C$$

9. Simplificação de Expressões Booleanas

- Exercício: Simplifique a expressão:

$$S = \left[\overline{(\overline{AC}) + B + D}\right] + C(\overline{ACD})$$ para $$S = C\overline{D} + \overline{A}C$$

9. Simplificação de Expressões Booleanas

- Resposta: $S = \left[\overline{(\overline{\overline{AC}}) + B + D}\right] + C(\overline{ACD})$

Aplicando o teorema de De Morgan ao 1º e 2º termos, obtemos:

$$S = \overline{(\overline{A} + \overline{C} + B + D)} + C(\overline{A} + \overline{C} + \overline{D})$$

Agora, aplicando o teorema de De Morgan ao 1º termo e a propriedade distributiva ao 2º termo, temos:

$$S = AC\overline{D}\,\overline{B} + \overline{A}C + C\overline{C} + C\overline{D}$$

Reescrevendo, aplicando a identidade $X.\overline{X} = 0$, temos:

$$S = A\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}C + C\overline{D}$$

Evidenciando o termo $C\overline{D}$, vamos ter:

$$S = C\overline{D}(A\overline{B} + 1) + \overline{A}C$$

$S = C\overline{D}.1 + \overline{A}C \rightarrow$ identidade X+1=1

$\therefore S = C\overline{D} + \overline{A}C$

10. Mapa de Veitch-Karnaugh

- Simplificar expressões e circuitos utilizando as propriedades algébricas é uma atividade complexa, pois nem sempre será possível obter uma simplificação eficiente.

- Algumas expressões maiores (com maior número de varáveis) são complexas de serem simplificadas, e o tempo gasto pode tornar inviável.

- Neste contexto, o **mapa de Karnaugh** pode ser uma ferramenta interessante, pois é uma técnica mais padronizada de simplificação.

11. Mapa de Veitch-Karnaugh para 2 Variáveis

- A imagem abaixo mostra as regiões do mapa:

No mapa, encontramos todas as possibilidades assumidas entre as variáveis A e B. A figura 3.3 mostra todas as regiões do mapa.

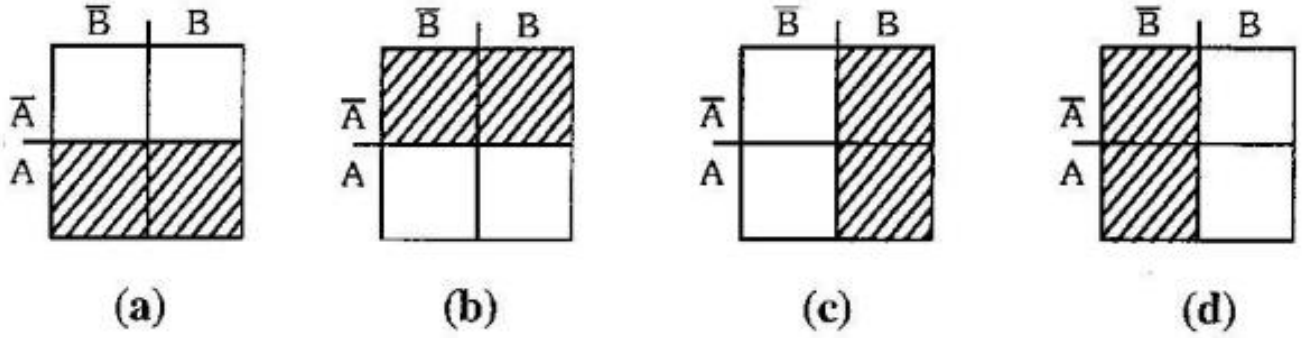


Figura 3.3 - Regiões do mapa de Veitch-Karnaugh:

(a) região onde $A = 1$.

(b) região onde $A = 0$ $(\overline{A} = 1)$.

(c) região onde $B = 1$.

(d) região onde $B = 0$ $(\overline{B} = 1)$.

11. Mapa de Veitch-Karnaugh para 2 Variáveis

- A imagem abaixo mostra como montar o mapa:

Com 2 variáveis, podemos obter 4 possibilidades:

A	B	
0	0	→ caso 0
0	1	→ caso 1
1	0	→ caso 2
1	1	→ caso 3

Podemos distribuir, então, as 4 possibilidades neste diagrama, da seguinte forma:

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	Caso 0 $\overline{A}$ $\overline{B}$ 0 0	Caso 1 $\overline{A}$ B 0 1
A	Caso 2 A $\overline{B}$ 1 0	Caso 3 A B 1 1

11. Mapa de Veitch-Karnaugh para 2 Variáveis

- Exemplo: Vamos simplificar a expressão:

A	B	S		
0	0	0	$\longrightarrow$	caso 0
0	1	1	$\longrightarrow$	caso 1
1	0	1	$\longrightarrow$	caso 2
1	1	1	$\longrightarrow$	caso 3

$$S = \overline{A}B + A\overline{B} + AB$$

11. Mapa de Veitch-Karnaugh para 2 Variáveis

- Colocando os valores da tabela no mapa:

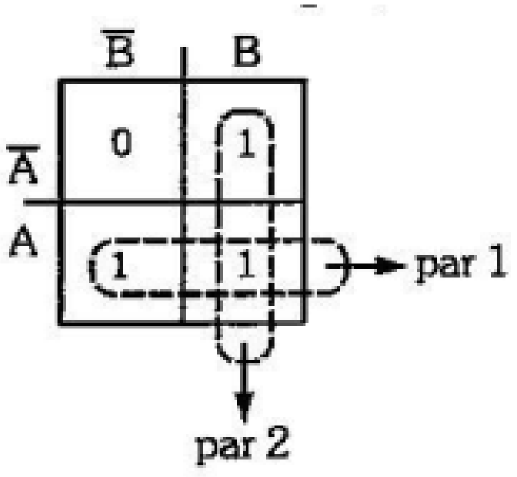
A	B	S	
0	0	0	→ caso 0
0	1	1	→ caso 1
1	0	1	→ caso 2
1	1	1	→ caso 3

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	0	1
A	1	1

11. Mapa de Veitch-Karnaugh para 2 Variáveis

- Para simplificar, precisamos agrupar as regiões onde o valor é 1, no menor número possível de agrupamento. Nas regiões onde 1 não puder ser agrupado, serão consideradas isoladamente.

- Neste exemplo, conseguimos agrupar os valores 1 em dois casos: Caso 1 (linha A) e Caso 2 (linha B). Após o agrupamento, basta somar os valores dos dois casos, e teremos uma simplificação:



$$S = \text{Par } 1 + \text{Par } 2 \quad \therefore \quad S = A + B$$

11. Mapa de Veitch-Karnaugh para 2 Variáveis

- Exercício: Simplifique a expressão

$$S = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B + A\overline{B}$$

11. Mapa de Veitch-Karnaugh para 2 Variáveis

- Resposta:

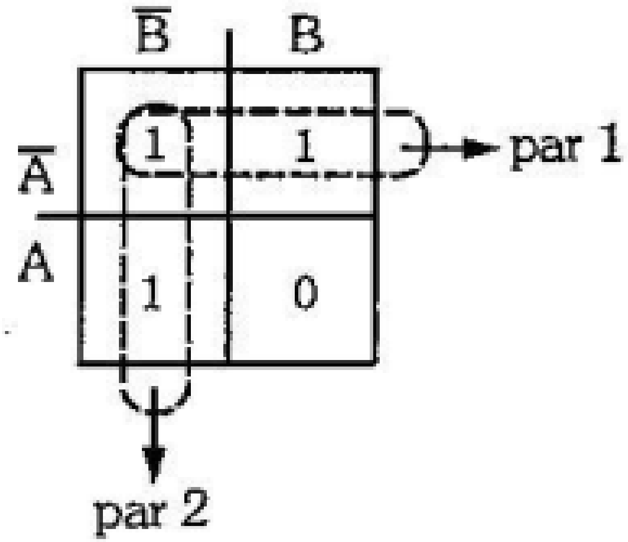
$$S = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B + A\overline{B}$$

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	1	1
A	1	0

11. Mapa de Veitch-Karnaugh para 2 Variáveis

- Resposta: Agora basta agrupar os pares e fazer a soma:



Somando as expressões dos pares, temos a expressão simplificada:

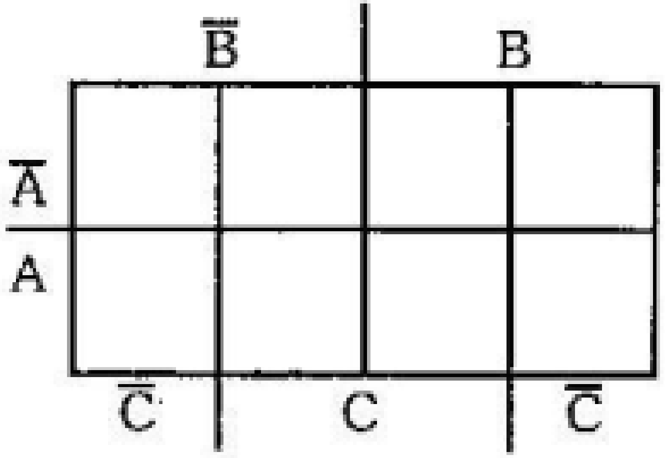
$$S = \overline{A} + \overline{B}$$

Notamos que a tabela da verdade é a de uma porta NE. Aplicando o teorema de De Morgan à expressão, após a simplificação, encontramos a expressão de uma porta NE:

$$S = \overline{AB}$$

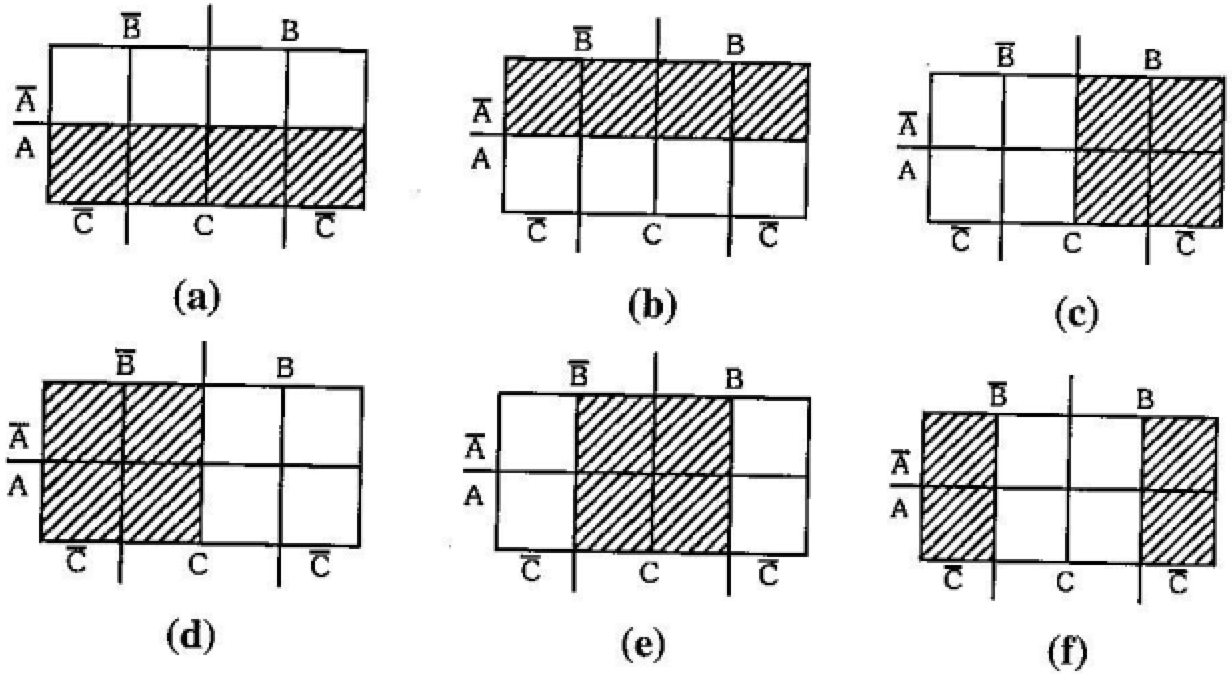
12. Mapa de Veitch-Karnaugh para 3 Variáveis

- A imagem abaixo mostra o mapa com 3 variáveis:



12. Mapa de Veitch-Karnaugh para 3 Variáveis

- A imagem abaixo mostra o mapa com 3 variáveis:



(a) Região na qual $A = 1$.

(b) Região na qual $\overline{A} = 1 (A = 0)$.

(c) Região na qual $B = 1$.

(d) Região na qual $\overline{B} = 1 (B = 0)$.

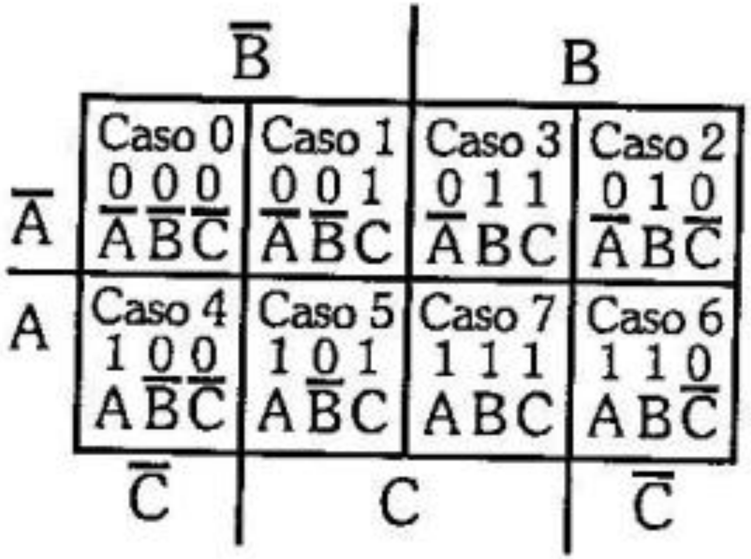
(e) Região na qual $C = 1$.

(f) Região na qual $\overline{C} = 1 (C = 0)$.

12. Mapa de Veitch-Karnaugh para 3 Variáveis

- A imagem mostra como montar o mapa:

Caso	A	B	C
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1



12. Mapa de Veitch-Karnaugh para 3 Variáveis

- Para simplificar, basta encontrar os grupos. Com 3 variáveis são mais opções de agrupamento:

a) Oitava:

Agrupamento máximo, onde todas as localidades valem 1. A figura 3.22 apresenta esta situação:

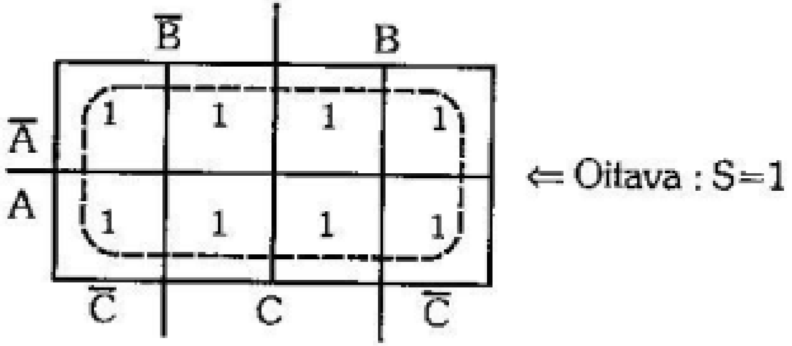


Figura 3.22

12. Mapa de Veitch-Karnaugh para 3 Variáveis

b) Quadras:

Quadras são agrupamentos de 4 regiões, onde S é igual a 1, adjancentes ou em seqüência. Vamos agora formar algumas quadras possíveis num diagrama de 3 variáveis, a título de exemplo:

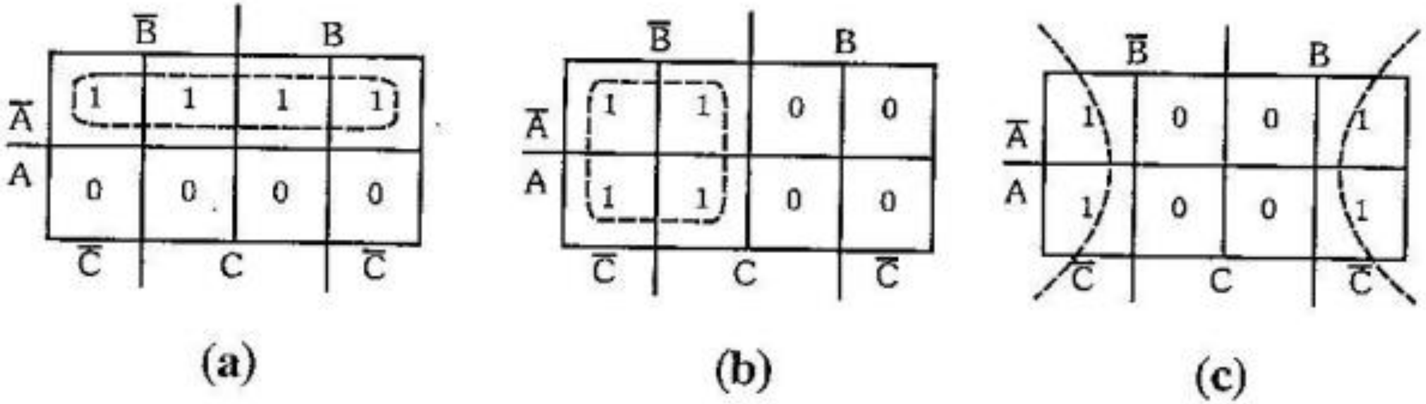


Figura 3.23 - (a) Quadra $\overline{A}$.
(b) Quadra $\overline{B}$.
(c) Quadra $\overline{C}$.

12. Mapa de Veitch-Karnaugh para 3 Variáveis

c) Pares:

A figura 3.24 apresenta, como exemplo, 2 pares entre os 12 possíveis em um diagrama de 3 variáveis:

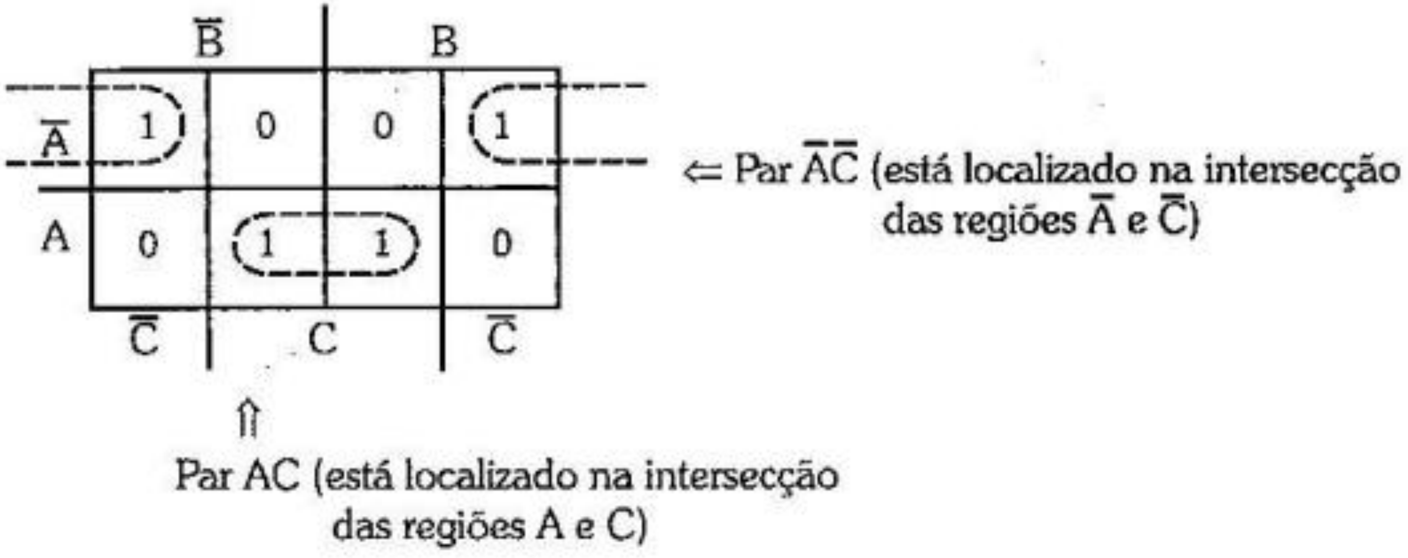


Figura 3.24

12. Mapa de Veitch-Karnaugh para 3 Variáveis

d) Termos isolados:

Vejamos na figura 3.25, alguns exemplos de termos isolados, que, como já dissemos, são os casos de entrada sem simplificação.

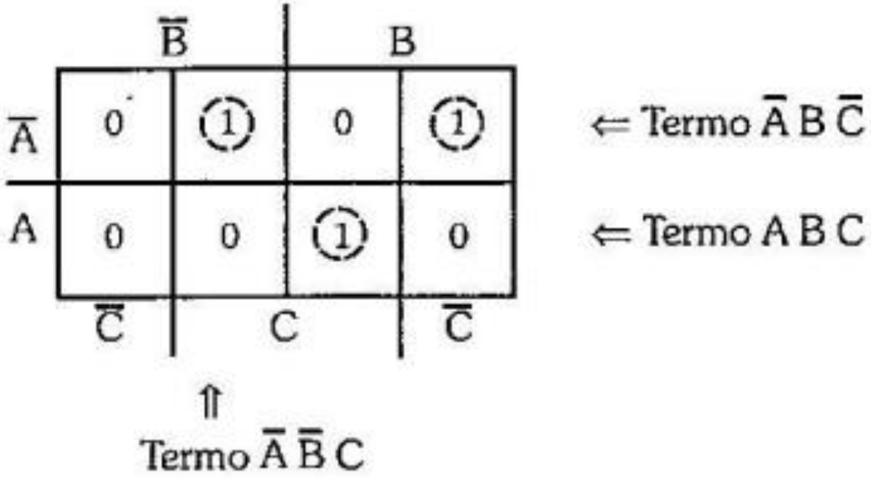


Figura 3.25

12. Mapa de Veitch-Karnaugh para 3 Variáveis

- Exemplo: Simplifique a expressão

$$S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C}$$

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

	$\overline{B}$		B	
$\overline{A}$	Caso 0 1	Caso 1 0	Caso 3 1	Caso 2 1
A	Caso 4 1	Caso 5 0	Caso 7 0	Caso 6 1
	$\overline{C}$	C		$\overline{C}$

12. Mapa de Veitch-Karnaugh para 3 Variáveis

- Exemplo: Fazendo o agrupamento

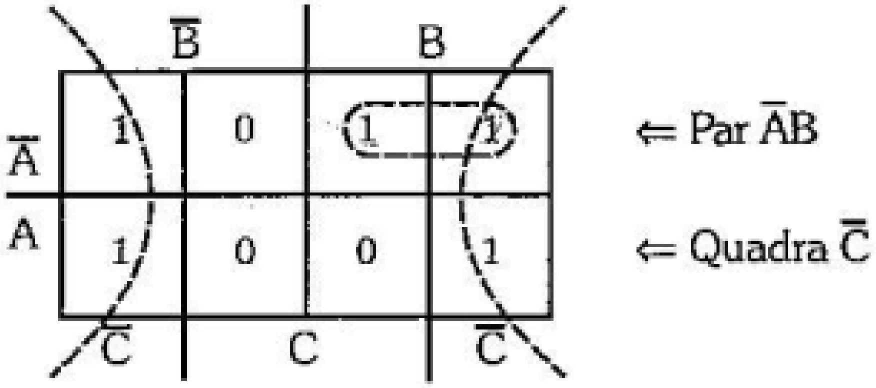


Figura 3.26

Notamos que esse par não depende de C, pois está localizado tanto em C como em $\overline{C}$, resultando sua expressão independente de C, ou seja, o termo $\overline{A}B$.

O passo final é somarmos as expressões referentes aos agrupamentos. A expressão final minimizada será: $S = \overline{A}B + \overline{C}$.

12. Mapa de Veitch-Karnaugh para 3 Variáveis

- Exercício: Minimize o circuito que representa a tabela

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

12. Mapa de Veitch-Karnaugh para 3 Variáveis

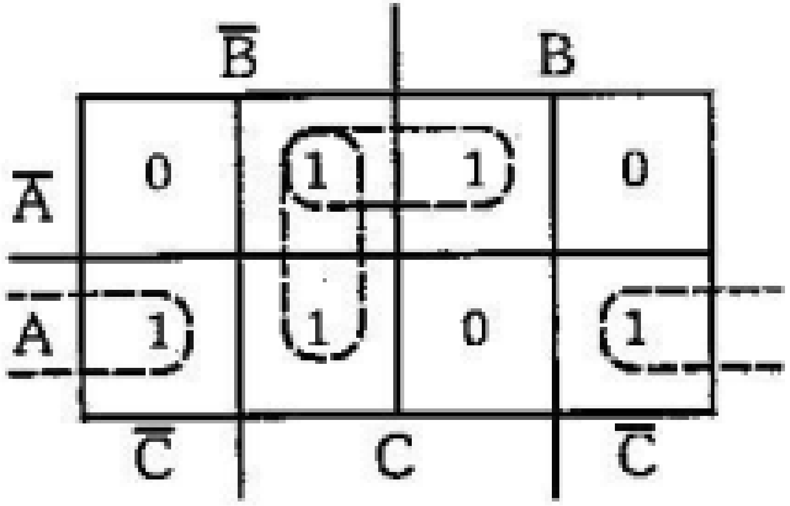
- Resposta: Montando o mapa

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

	$\overline{B}$		B	
$\overline{A}$	0	1	1	0
A	1	1	0	1
	$\overline{C}$	C		$\overline{C}$

12. Mapa de Veitch-Karnaugh para 3 Variáveis

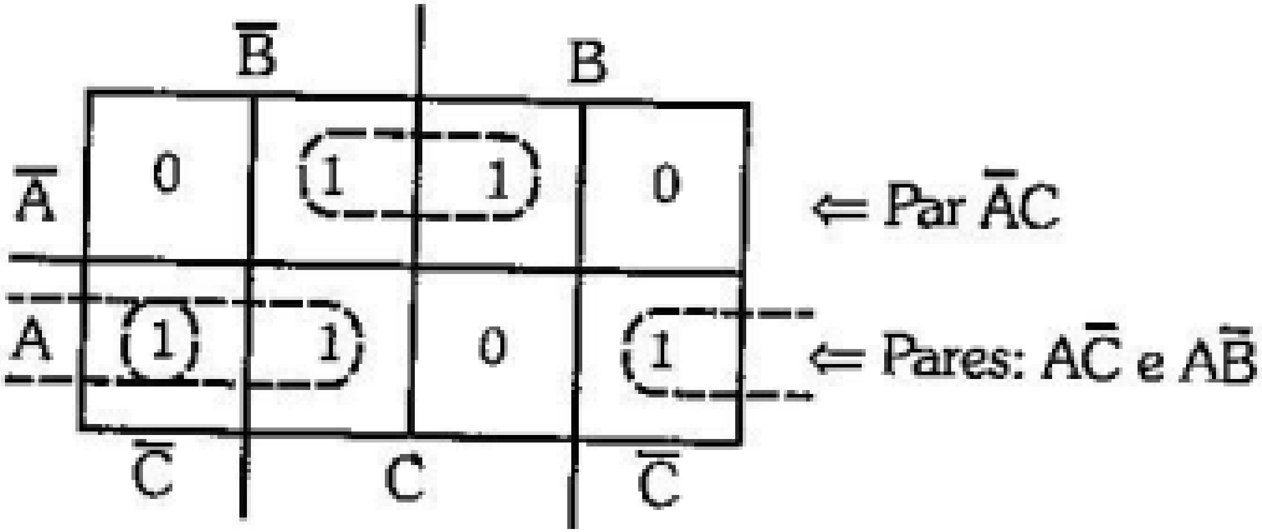
- Resposta: Fazendo o agrupamento



$$S = \overline{A}C + A\overline{C} + \overline{B}C \,.$$

12. Mapa de Veitch-Karnaugh para 3 Variáveis

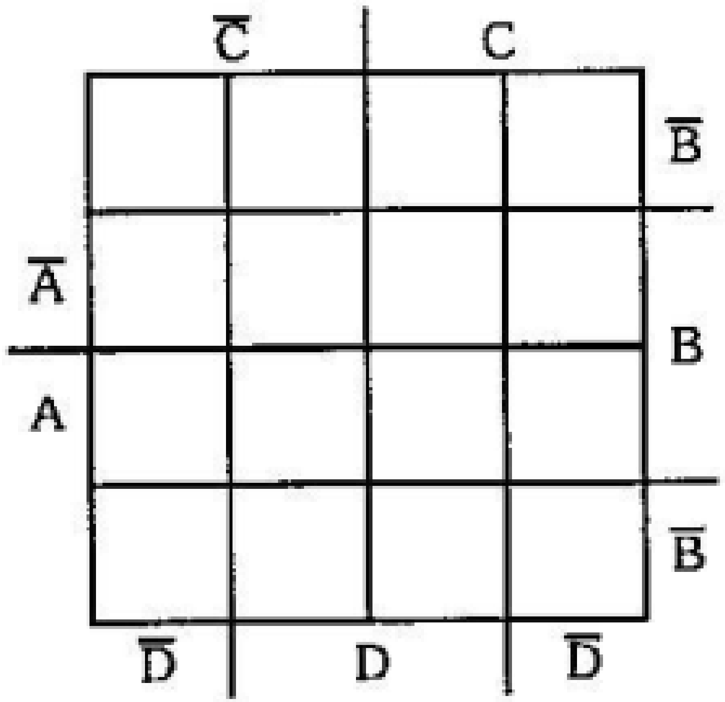
- Resposta: Outra forma de fazer o agrupamento



$$S = \overline{A}C + A\overline{B} + A\overline{C}$$

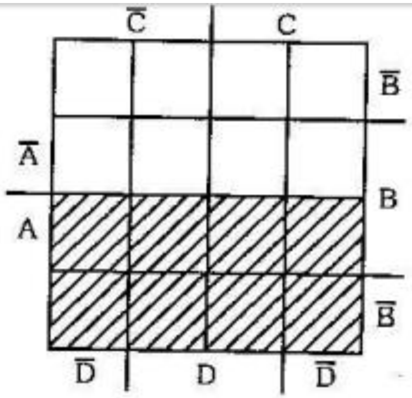
13. Mapa de Veitch-Karnaugh para 4 Variáveis

- A imagem mostra o diagrama para 4 variáveis

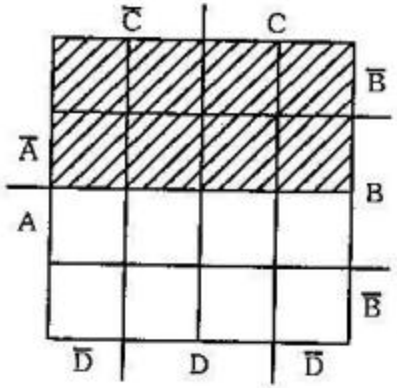


13. Mapa de Veitch-Karnaugh para 4 Variáveis

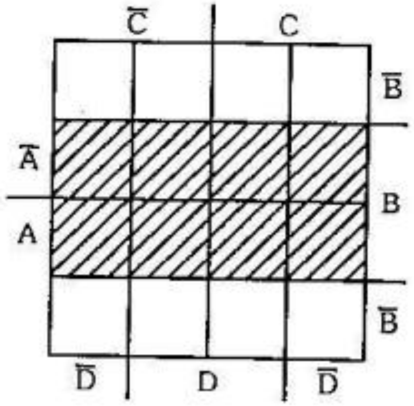
- A imagem mostra as regiões de cada variável no mapa:



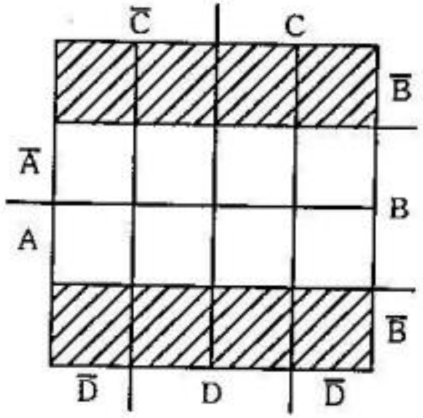
(a) Região onde A = 1.



(b) Região onde $\overline{A}$ = 1 (A = 0).



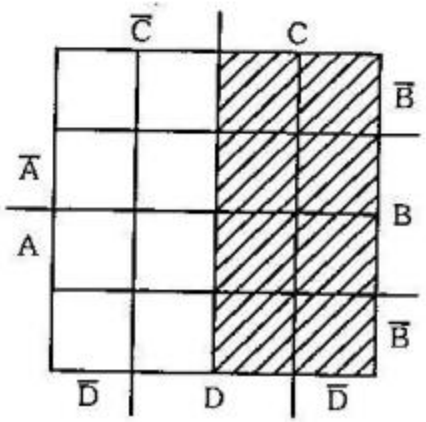
(c) Região onde B = 1.



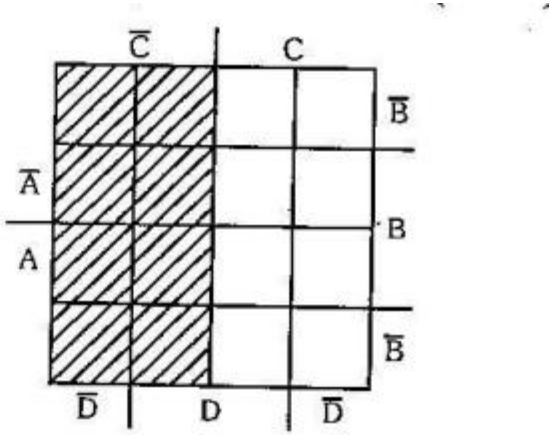
(d) Região onde $\overline{B}$ = 1 (B = 0).

13. Mapa de Veitch-Karnaugh para 4 Variáveis

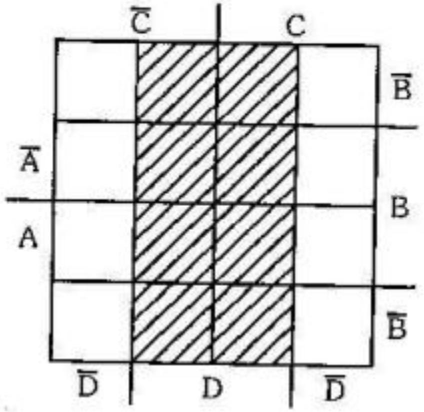
- A imagem mostra as regiões de cada variável no mapa:



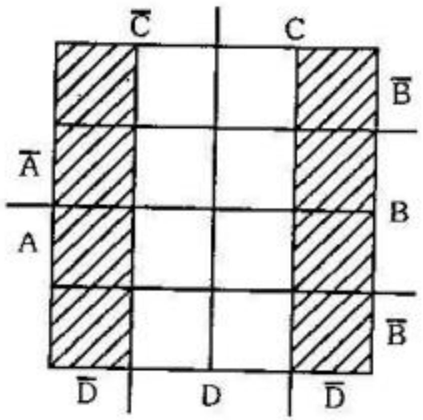
(e) Região onde C = 1.



(f) Região onde $\overline{C}$ = 1 (C = 0).



(g) Região onde D = 1.



(h) Região onde $\overline{D}$ = 1 (D = 0).

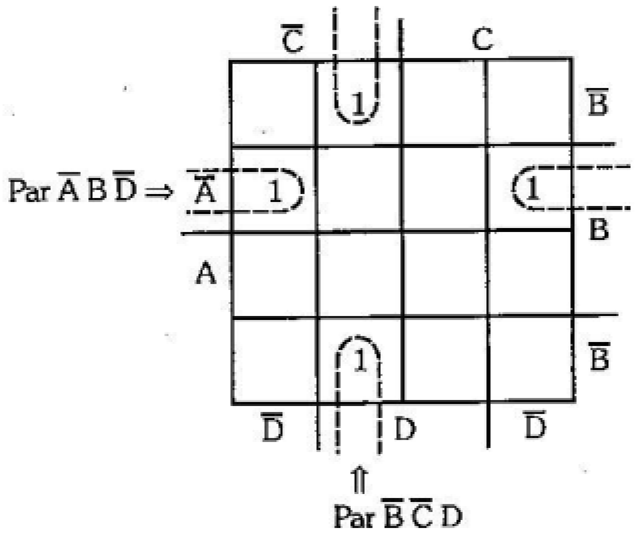
13. Mapa de Veitch-Karnaugh para 4 Variáveis

- Exemplos de pares possíveis:

Devemos ressaltar aqui, que no diagrama, os lados extremos opostos se comunicam, ou seja, podemos formar oitavas, quadras e pares com os termos localizados nos lados extremos opostos.

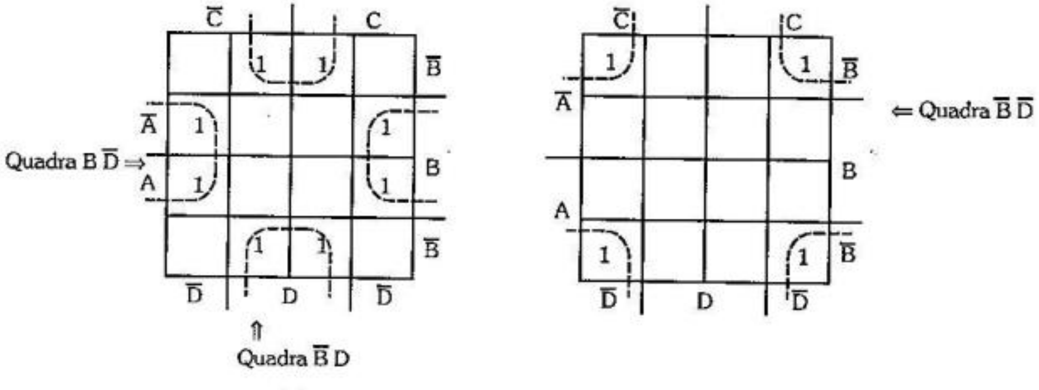
Vamos, como exemplo, verificar alguns desses casos no diagrama:

a) Exemplos de Pares:



13. Mapa de Veitch-Karnaugh para 4 Variáveis

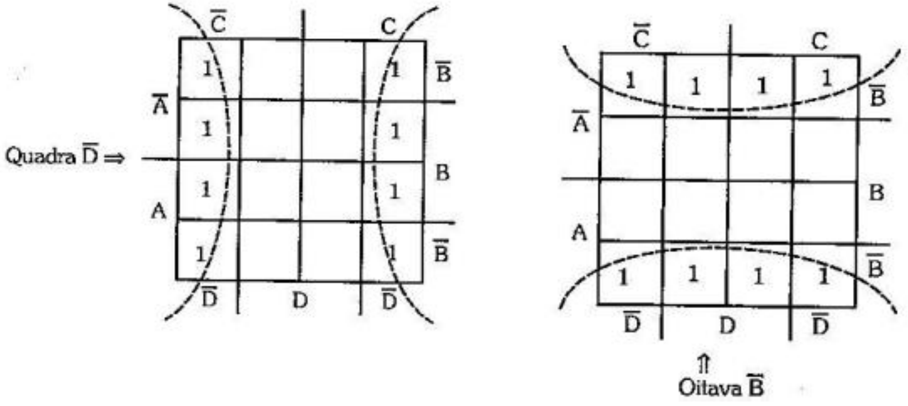
- Exemplos de pares possíveis:



(a) (b)

Figura 3.36

c) Exemplos de Oitavas:



13. Mapa de Veitch-Karnaugh para 4 Variáveis

- A imagem mostra como o mapa pode ser montado com base na tabela verdade:

Casos	A	B	C	D
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

		$\bar{C}$		C		
$\bar{A}$	Caso 0 0 0 0 0 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	Caso 1 0 0 0 1 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	Caso 3 0 0 1 1 $\bar{A}\bar{B}CD$	Caso 2 0 0 1 0 $\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	$\bar{B}$
	Caso 4 0 1 0 0 $\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	Caso 5 0 1 0 1 $\bar{A}B\bar{C}D$	Caso 7 0 1 1 1 $\bar{A}BCD$	Caso 6 0 1 1 0 $\bar{A}BC\bar{D}$	B
A	Caso 12 1 1 0 0 $AB\bar{C}\bar{D}$	Caso 13 1 1 0 1 $AB\bar{C}D$	Caso 15 1 1 1 1 $ABCD$	Caso 14 1 1 1 0 $ABC\bar{D}$	
	Caso 8 1 0 0 0 $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	Caso 9 1 0 0 1 $A\bar{B}\bar{C}D$	Caso 11 1 0 1 1 $A\bar{B}CD$	Caso 10 1 0 1 0 $A\bar{B}C\bar{D}$	$\bar{B}$
	$\bar{D}$	D		$\bar{D}$	

13. Mapa de Veitch-Karnaugh para 4 Variáveis

- Exemplo: Simplifique a expressão

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$$S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D$$
$$+ A\overline{B}CD + AB\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}D + ABCD$$

13. Mapa de Veitch-Karnaugh para 4 Variáveis

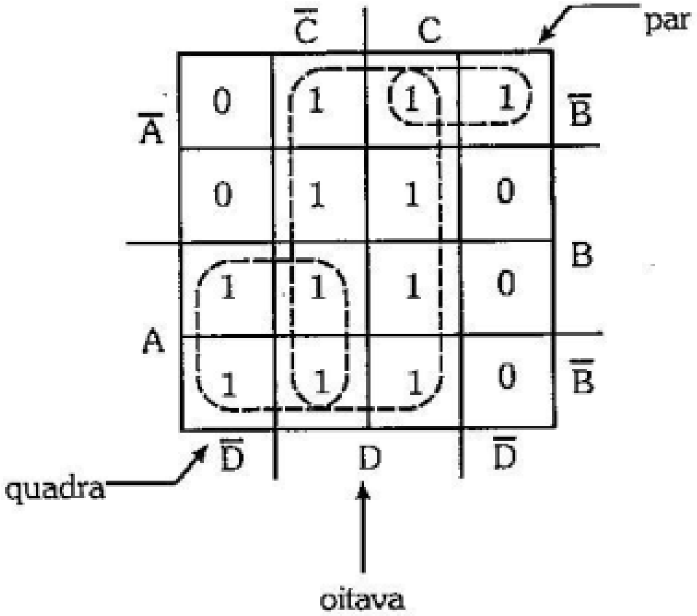
- Resposta: Montando o mapa

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

	$\overline{C}$		C		
	0	1	1	1	$\overline{B}$
$\overline{A}$	0	1	1	0	B
A	1	1	1	0	
	1	1	1	0	$\overline{B}$
	$\overline{D}$	D		$\overline{D}$	

13. Mapa de Veitch-Karnaugh para 4 Variáveis

- Resposta: Fazendo o agrupamento



oitava: D

quadra : $A\overline{C}$

par: $\overline{A}\,\overline{B}\,C$

$$S = D + A\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C.$$

13. Mapa de Veitch-Karnaugh para 4 Variáveis

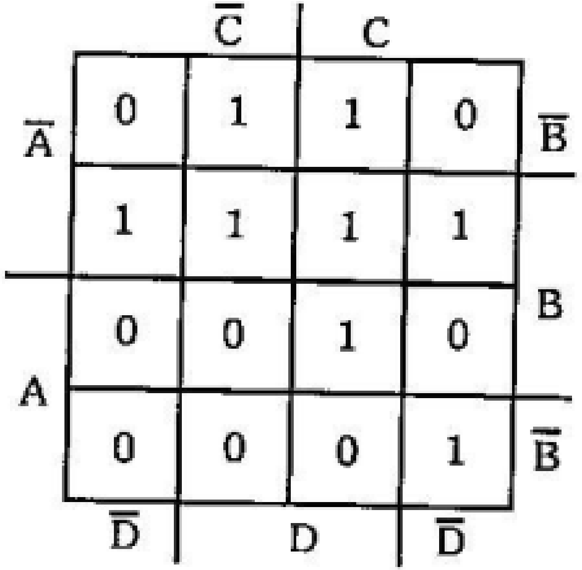
- Exercício: Mostre a expressão minimizada da tabela

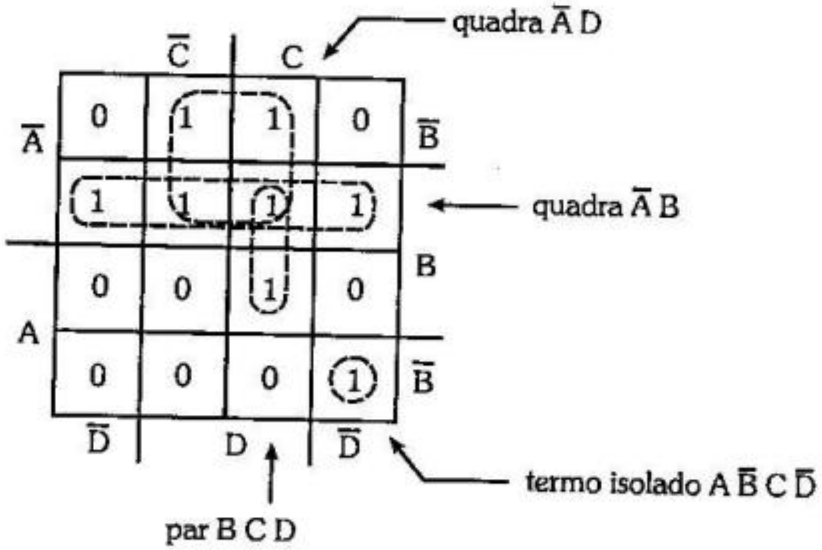
A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

13. Mapa de Veitch-Karnaugh para 4 Variáveis

- Resposta:

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1





$$S = A\overline{B}C\overline{D} + BCD + \overline{A}B + \overline{A}D$$